Лекция № 4.

Методы представления нечетких знаний

Методы представления нечетких знаний

Часто, представляя знания о сложных предметных областях, приходится сталкиваться с их *неполнотой*, *неточностью*, *неоднозначностью*, *нечеткостью*.

Нечеткость связана с отсутствием точных границ области определений и свойственна большинству понятий.

Эта *нечеткость границ* приводит к тому, что в общем случае оказывается невозможным решать вопрос о соответствии данного объекта и данного понятия по принципу *да/нет*. Часто можно только говорить о степени соотнесенности одного другому, оценивая ее, например, в интервале от **1** (определенное ***да***) до **0** (определенное ***нет***).

Это означает, что переход от полной принадлежности объекта классу к полной его непринадлежности происходит *не скачком*, а *плавно*, причем принадлежность объекта классу выражается числом из интервала [0,1].

Методы представления нечетких знаний

Аналогичные рассуждения можно отнести и к отдельным свойствам объектов. Не всегда можно четко рассуждать о таких свойствах объектов, как вес, цвет, температура, размер и т.п. Нет четкой границы между тяжелым и легким, темным и светлым, холодным и горячим, большим и маленьким и т.п.

Методы представления нечетких знаний были предложены американским профессором Л.Заде в 1965 году.

Он ввел два фундаментальных понятия:

- **лингвистическая переменная** и
- **нечеткое множество**.

Понятие лингвистической переменной

Сначала дадим неформальное определение.

Лингвистическая переменная (ЛП) – это переменная, значениями которой являются слова или выражения естественного (иногда искусственного) языка.
Переменную ***Возраст*** можно рассматривать как лингвистическую переменную, если она принимает не числовые значения (например, от 0 до 100), а лингвистические значения, такие как *молодой, старый, очень молодой, очень старый* и т.п.
Аналогично можно ввести ЛП ***Температура_тела_больного*** со значениями *нормальная, повышенная, высокая, очень высокая* и т.п.

Понятие лингвистической переменной

Лингвистическая переменная описывается следующим набором:

$(N, T(N), U, G, M)$, где

N – название лингвистической переменной,

$T(N)$ – терм-множество N, т.е. совокупность ее лингвистических значений,

U – универсальное множество,

G – синтаксическое правило, порождающее терм-множество $T(N)$,

M – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению X ставит в соответствие его смысл $M(X)$, причем $M(X)$ обозначает нечеткое подмножество множества U (т.е. подмножество, границы которого размыты).

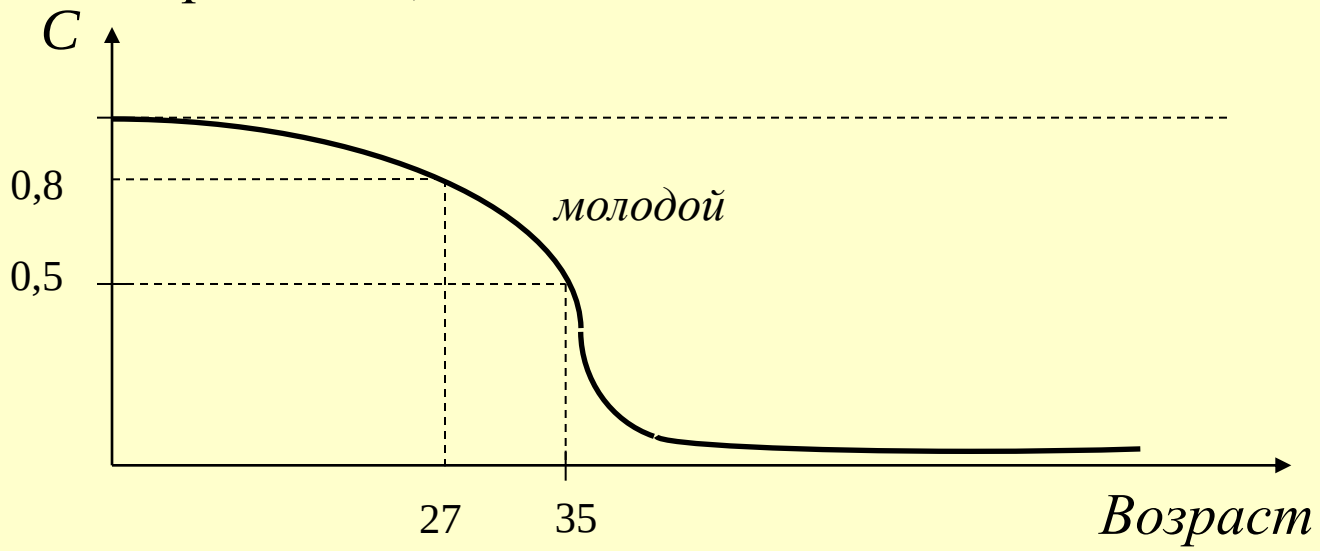
Понятие лингвистической переменной

Смысл лингвистического значения X характеризуется функцией совместимости

$c : U \to [0,1]$,

которая каждому элементу $u \in U$ ставит в соответствие значение совместимости этого элемента с X .

Так, например, совместимость возраста 27 лет со значением *молодой* может быть равна 0.8, а 35 лет – 0,5.



Понятие лингвистической переменной

Таким образом, с помощью лингвистических переменных можно приближенно описывать понятия и явления (свойства) не поддающиеся точному описанию.

Если понимать ***истинность*** как лингвистическую переменную со значениями *истинно, почти истинно, не очень истинно* и т.п., то мы переходим к так называемой **нечеткой логике**, на которую могут опираться приближенные рассуждения.

Пример.

Пусть x – мало,

x и y – примерно равны,

тогда y – более или менее мало.

Нечеткие множества

Ранее, при рассмотрении смысла лингвистической переменной мы уже столкнулась с нечетким подмножеством определив его как множество с размытыми или нечеткими границами.

По-английски Fuzzy – означает нечеткий, размытый. Поэтому иногда нечеткие множества называют размытыми множествами или множествами Заде (Zadeh set) – по имени их автора.

Дадим более строгое определение нечеткого множества.

Нечеткое множество (НМ)

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \}$$

определяется как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$, или непосредственно в виде функции принадлежности

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1].$$

Нечеткие множества

Универсальным множеством (УМ) X нечеткого множества A называется область определения функции принадлежности μ_A.

Носителем НМ A называется множество таких точек в X, для которых

$\mu_A(x)>0.$

Высотой НМ A называется величина $\sup\limits_{X} \mu_A(x).$

Точкой перехода НМ A называется такой элемент множества X, степень принадлежности которого множеству A равна 0.5.

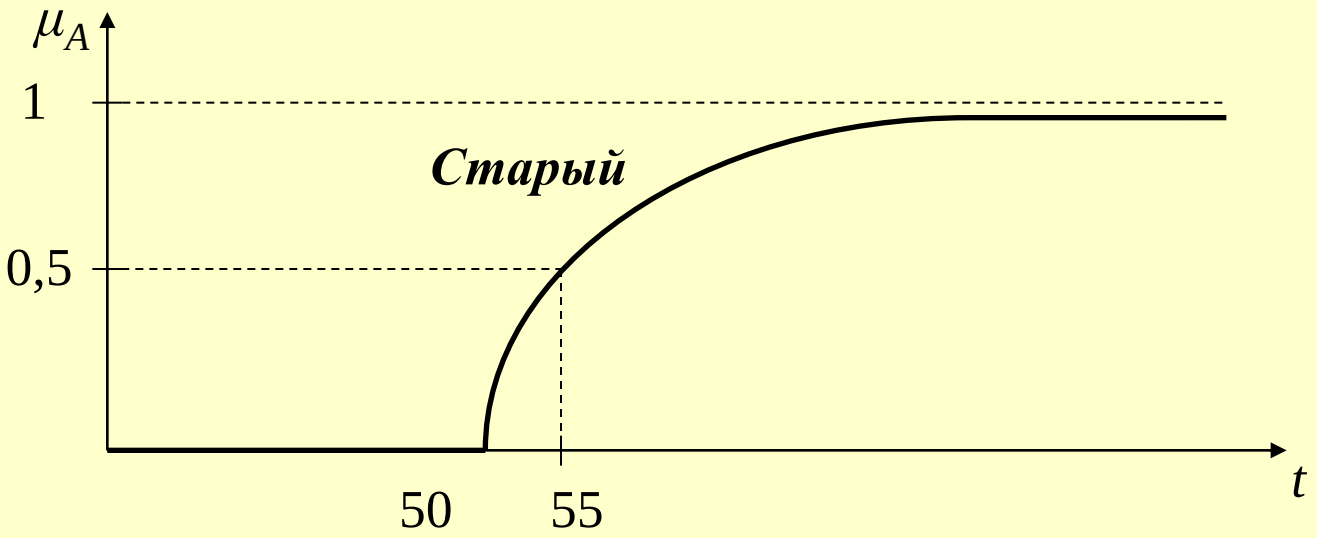
Пример нечеткого множества

Пусть УМ *X* представляет собой интервал [0,100], и переменная *x*, принимающая значения из этого интервала, интерпретируется как *возраст*. Нечеткое подмножество универсального множества *X* , обозначаемое термином ***старый***, можно определить функцией принадлежности вида

$$\mu_A(x) = 0, \text{ при } 0 \le x \le 50,$$

$$\mu_A(x) = (1+((x - 50)/5)^{-2})^{-1}), \quad \text{при } 50 < x \le 100.$$

В этом примере *носителем* НМ ***старый*** является интервал [50,100], *высота* близка к 1, а *точкой перехода* является значение x=55.



Запись нечетких множеств

Обычно НМ A универсального множества X записывается в виде

$$A = \mu_1|x_1 + \mu_2|x_2 + \ldots + \mu_n|x_n,$$

где μ_i, i=1,...,n - степень принадлежности элемента x_i НМ A.

Пример:

НМ ***Несколько*** = 0.5|2 + 0.8|3 + 0.9|4 + 1|5 + 1|6 +1|7 +0.8|8 + 0.5|9

Если носитель НМ имеет мощность континуума, то используется следующая запись:

$$A = \int_X \mu_A(x)|x,$$

где знак $\int$ обозначает объединение одноточечных НМ $\mu_A(x)|x$, $x \in X$.

Пример:

НМ ***старый*** $= \int_{50}^{100} (1+((x - 50)/5)^{-2})^{-1})|x$

Операции над нечеткими множествами

1. **Дополнение** НМ А:

$$\neg A = \int_X (1-\mu_A(x)) \mid x$$

Операция дополнения соответствует логическому отрицанию.

2. **Объединение** НМ А и В:

$$A + B = \int_X (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) \mid x$$

Объединение соответствует логической связке «или».

3. **Пересечение** НМ А и В:

$$A \cap B = \int_X (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \mid x$$

Пересечение соответствует логической связке «и».

Операции над нечеткими множествами

4. **Произведение** НМ А и В:

$$A * B = \int_X (\mu_A(x) * \mu_B(x)) \mid x$$

Таким образом, любое НМ A^m, где m - положительное число, следует понимать как

$$A^m = \int_X (\mu_A(x))^m \mid x$$

Пример

Пусть мы имеем универсальное множество X = 1 + 2 + 3 + … + 10 и два его нечетких подмножества A и B, причем

A = 0.8|3 + 1|5 + 0.6|6

B = 0.7|3 + 1|4 + 0.5|6

Тогда

1. **Дополнение** A

¬A = 1|1 + 1|2 + 0.2|3 + 1|4 + 0.4|6 + 1|7 + 1|8 + 1|9 + 1|10

2. **Объединение** A и B

A + B = 0.8|3 + 1|4 + 1|5 + 0.6|6

3. Пересечение НМ A и B

A ∩ B = 0.7|3 + 0.5|6

4. Произведение НМ A и B:

A * B = 0.56|3 + 0.3|6

A^2 = 0.64|3 + 1|5 + 0.36|6

Нечеткие отношения

Для выполнения нечетких выводов необходимо уметь представлять нечеткие отношения.

Если X - декартово произведение n универсальных множеств

$X_1, X_2, ..., X_n$,

то n-арное нечеткое отношение (НО) R в X определяется как нечеткое подмножество универсального множества X:

$$R = \int_{X_1 x X_2 x ... X_n} \mu_R(x_1, x_2, ..., x_n) \mid (x_1, x_2, ..., x_n),$$

где μ_R - функция принадлежности НМ R.

В отличие от обычного определения отношения в математике:

$R \subseteq X_1 \text{ x } X_2 \text{ x } ... \text{ x } X_n$

Примеры нечетких отношений

Распространенными примерами НО являются *много больше чем*, *имеет сходство*, *близко к* и т.д.

Например, если X1=X2=(– ∞,+ ∞), то отношение *близко к* можно определить следующим образом:

$$\textit{близко к} = \int_{X_1 x X_2} e^{-a*|x1 - x2|} \,|\, (x_1, x_2),$$

где *a* - коэффициент масштабирования.